Jurnal Kajian dan Penelitian Umum
Vol. 2, No. 1 February 2024
e-ISSN: 2985-8666; p-ISSN: 2985-9573, Hal 189-201
DOI: https://doi.org/10.47861/jkpu-nalanda.v2i1.864

Teori Himpunan: Sebuah Studi Tentang Teori Ukuran Lebesgue Dan Fungsi Cantor

Dika Tamara Dewi [1]; **Melati Rianingsi** [2]; **Santi Yani Narwawan** [3]; **Halima Rumaday**[4]; **Prihaten Maskhuliah**[5]
Institut Agama Islam Negeri Fattahul Muluk Papua

Alamat: Jalan Merah Putih, Jalan Buper Waena, Kecamatan Heram, Kota Jayapura, Papua
Korespondensi penulis: dewidika251@gmail.com

Abstract: *Set theory is a mathematical science that studies the theory associated with abstract collections of objects. These collections can be defined as distinct objects and can already be proven clearly and can be seen as a unified whole. Set theory is related to Lebesgue Measure Theory because, this measure maps Algebra* $-\sigma$ *to* $[0,\infty)$ *. Henry Lebesgue (1902) compiled a measure theory known as the Lebesgue measure. By using this measure theory, there can be a correlation with the cantor set. The reason is that Lebesgue measure theory is one of the set forms that has zero Lebesgue measure where there is a cantor function in it which is an uncountable set. The purpose of this article is to discuss the relationship between Lebesgue measure theory and cantor function on a set.*

Keywords: *Set, Lebesgue measure, Cantor function*

Abstrak. Teori himpunan merupakan ilmu matematika yang mempelajari tentang teori yang berkaitan dengan kumpulan-kumpulan objek yang abstrak. Kumpulan-kumpulan ini dapat didefinisikan sebagai benda-benda yang berbeda dan sudah dapat dibuktikan dengan jelas dan dapat dilihat sebagai suatu kesatuan yang utuh. Terori himpunan berkaitan dengan Teori Ukuran Lebesgue, karena ukuran ini memetakan Aljabar $-\sigma$ ke $[0,\infty)$. Henry Lebesgue (1902) menyusun teori ukuran yang dikenal dengan istilah ukuran Lebesgue. Dengan menggunakan teori ukuran tersebut, dapat terjadi korelasi dengan himpunan cantor. Penyebabnya ialah teori ukuran lebesgue merupakan salah satu dari bentuk-bentuk himpunan yang memiliki ukuran Lebesgue nol dimana, terdapat fungsi cantor di dalamnya yang merupakan himpunan tak terhitung. Tujuan artikel ini adalah membahas keterkaitan teori ukuran lebesgue dan fungsi cantor pada suatu himpunan.

Kata Kunci: *Himpunan, ukuran Lebesgue, fungsi Cantor*

LATAR BELAKANG

Henry John Stephen Smith menemukan Himpunan Cantor pada tahun 1874, dan George Cantor memperkenalkannya pada tahun 1883. Teori himpunan adalah teori yang sangat penting dalam matematika karena diciptakan oleh Henry. Cantor menunjukkan bahwa angka sebenarnya lebih besar daripada angka asli. Faktanya, pendekatan yang digunakan Cantor untuk membuktikan teorema ini menyebabkan adanya perbedaan tingkat ketertakhinggaan(Nur Aliyah, 2024).

Himpunan Cantor terdiri dari irisan dari semua interval tutup yang memiliki karakteristik tertentu. Bahkan saat ini, himpunan Cantor sering digunakan sebagai contoh penyangkalan. Cantor menemukan Himpunan Cantor $\frac{1}{3}$, kemudian Himpunan Cantor $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$, dan

Received Desember 10, 2023; Accepted January 30, 2024; Published February 29, 2024
* Dika Tamara Dewi, dewidika251@gmail.com

seterusnya. Secara keseluruhan, akan ditunjukkan bahwa Himpunan Cantor $\frac{1}{2m-1}$ adalah himpunan Cantor yang telah didefinisikan, dengan $2 \leq m < \infty$(Diperumum et al., 2020).

Misalkan himpunan tak kosong Ω dan P(Ω) koleksi himpunan bagian dari Ω maka $\mathcal{A}$ disebut aljabar-σ pada Ω jika memenuhi syarat-syarat berikut:

(i) $\emptyset, \Omega \in \mathcal{A}$,

(ii) jika $\Omega \in \mathcal{A}$, maka $\Omega^c \in \mathcal{A}$, dan

(iii) jika $\Omega_1, \Omega_1, \cdots \in \mathcal{A}$, maka $\cup_{k=1}^{\infty} \in \mathcal{A}$.

Misalkan A adalah subhimpunan bilangan real, dan $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ adalah koleksi terhitung interval buka tak kosong dan terbatas yang meliputi A. Ukuran luar dari A, $m*(A)$, adalah

$m*(A) = inf\, \{\sum_{k=1}^{\infty} l(I_k) | A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} (I_k)\}$

Jadi, misalkan E ukuran Lebesgue adalah himpunan terukur yang ditunjukkan dengan $m(E)$ dan didefinisikan sebagai

$$m(E) = m^*(E).$$

Perlu diingat bahwa himpunan dapat memiliki ukuran Lebesgue nol, positif, atau bahkan tidak terukur. Misalnya, himpunan Cantor adalah himpunan tak terhitung tetapi memiliki ukuran Lebesgue nol. Selain itu, ada himpunan yang tidak memiliki ukuran Lebesgue terukur, seperti yang ditunjukkan oleh teorema berikut.

Teorema 1. (Royden, 2010) menyatakan bahwa setiap himpunan dari bilangan real dengan ukuran luar positif akan memiliki subhimpunan yang tidak terukur.

Dalam teori ukuran, teorema Vitali digunakan untuk membuktikan beberapa teorema tentang konvergensi keluarga fungsi terukur. Selain itu, teorema ini juga digunakan untuk membuktikan adanya himpunan bagian dari bilangan real yang tidak dapat diukur.

Selain itu, sejumlah besar penelitian telah dilakukan tentang teori ukuran, khususnya fungsi terukur dan fungsi Cantor. Beberapa contoh penelitian ini termasuk tentang fungsi terukur oleh Zaanen (1986) dan tentang fungsi Cantor oleh Dovgoshey dkk (2006) dan Corin dkk (2004).

Akibatnya, artikel ini membahas fungsi yang menghubungkan himpunan terukur ke dalam himpunan tak terukur.

KAJIAN TEORITIS

Agar penelitian ini lebih berfokus pada suatu masalah penelitian dan dapat menghasilkan kebaruan penelitian, serta memetakan posisi penelitian yang akan dilakukan oleh peneliti, maka peneliti perlu melakukan studi terhadap penelitian-penelitian terdahulu yang sejenis dengan tema penelitian yang akan dilakukan. Berdasarkan hal tersebut, peneliti melakukan studi literatur terhadap hasil penelitian terdahulu.

Berikut beberapa hasil dari penelitian terdahulu : Studi baru (Elin Herlinawati, 2020) menemukan bahwa ada hubungan antara teori ukuran, terutama ukuran Lebesgue, dan fungsi Cantor. Jika dimisalkan, ϕ itu adalah sebuah fungsi Cantor-Lebesgue dan dapat didefinisikan sebagai fungsi ϕ pada $[0,1]$ sebagai $\psi(x) = \phi(x) + \frac{1}{2}x$, untuk setiap $x \in [0,1]$, seperti yang ditunjukkan pada teorema 5. Jadi, φ itu adalah fungsi kontinu yang memetakan $[0,1]$ ke dalam $\left[0, \frac{3}{2}\right]$. Berdasarkan teorema ini, dapat disimpulkan bahwa suatu fungsi kontinu dapat memetakan suatu himpunan Cantor $\mathcal{C}$ ke dalam himpunan Lebesgue, yang akan bersifat positif, dan juga ke dalam teori himpunan, memasukkan subhimpunan dari himpunan Cantor.

Ada hubungan antara analisis nyata dan topologi umum yang lebih luas, seperti yang ditunjukkan oleh penelitian (Dylan R. Nelson, 2002). Terdapat tiga teorema: teorema 1.2 yang berkaitan dengan himpunan cantor yang tidak kosong, teorema 1.5 yang berkaitan dengan himpunan cantor yang tertutup dan tidak padat, dan teorema 1.7 yang berkaitan dengan himpunan cantor yang sempurna dan tidak memiliki batas. Dari semua teorema ini, dapat disimpulkan bahwa meskipun himpunan cantor tidak terhitung, itu tidak padat atau tidak memiliki batas.

Berdasarkan beberapa uraian penelitian terdahulu, dapat ditarik kesimpulan bahwa terdapat perbedaan antara penelitian yang dilakukan oleh peneliti diatas dengan peneliti yang akan peneliti lakukan pada pokok bahasan yaitu selain peneliti menjelaskan teori ukuran lebesgue dan fungsi cantor pada suatu himpunan, peneliti juga menjelaskan tentang sejarah teori himpunan seperti sejarah penemuan ukuran lebesgue dan fungsi cantor.

METODE PENELITIAN

Untuk mengumpulkan data, penelitian ini menggunakan metode penelitian kepustakaan atau studi literatur, yang melibatkan penggunaan berbagai literatur. Penelitian tentang Teori Himpunan: Sebuah Studi Tentang Teori Ukuran Lebesgue dan Fungsi Cantor dilakukan dengan menggunakan tinjauan yang sebangun atau terkait dengan tinjauan yang diteliti.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Sejarah Teori Himpunan

Fakta-fakta ini mendorong para ahli matematika untuk menggunakan himpunan. Sebagai contoh, ahli matematika yunani menggambarkan lingkaran sebagai kumpulan titik-titik yang berada dalam jarak matematis tetap dari titik tetap P. Namun gagasan tentang himpunan tak hingga dan himpunan berhingga menghindari asosiasi dan filsafat sepanjang masa. Pada (384-322) Aris Toteles berkata "tak terbatas tidak sempurna belum selesai dan karena itu, tak terfikirkan, tak terbentuk dan membingungkan". Pada (121-180 M) kaisar romawi dan filsuf marcus aqarchus berkata "dimana sesuatu yang hilang adalah teluk yang tak dapat diduga". Pada (1588-1679) seorang sarjana Thomas Hobbes berkata "ketika kita mengatakan sesuatu itu tidak buruk, yang kita maksud hanyalah bahwa kita tidak dapat mengakhiri sesuatu yang diberi nama".

Penelitian Georg Cantor sektar tahun 1870 dalam bidang kerangka teori himpunan tampa batas dan topik yang berkaitan dengan analisis memberikan landasan baru bagi perkembangan teori himpunan. Tetapi hasil Cantor tidak serta merta diakui masyarakat pada saat itu. Selain itu, dikatakan bahwa definisi tersebut betujuan untuk mengecualikan kontradisksi dan kesalahan logika. Yang paling ternama pada saat itu diberikan pada tahun 1918 bernama Bertand Russel (1872-1970) yang sering disapa sebagai paradoks russel.

Sebagai bagian dari upaya untuk menjelaskan tentang konsep ini, tindakan pertama para ahli matematika adalah memformalkan teori intuisi. Definisi aksiomatisasi adalah sebagai berikut: dimulai dengan satu pernyataan jelas yang dikenal sebagai hipotesis, diasumsikan bahwa seseorang dapat mengekstrak semua hipotesis dari suatu asumsi dengan menggunakan asumsi logika. Pada tahun 1903, Russell dan Alfred North Whitehead (1861-1974) dikenal sebagai prinsip matematika ada dalam tiga jilid karya dan sulit untuk diterapkan. Sebuah teori matematika tentang arus bolak-balik yang dapat diterapkan dan signifikasikan secara statistik diperkenalkan pada tahun 1908 oleh Ernst Zemlin (1871-1953).hal ini menjadi semakin meningkat pada tahun 1921 oleh saudara A Ibrahim (1891-1965) dan T skolem (1887-1963).

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918) adalah seorang matematikawan Jerman yang hidup pada akhir 1800-an dan menjadi orang pertama yang mengerti dan memahami teori himpunan. Dia lahir di St. Petersburg pada tanggal 3 Maret 1845 dan meninggal pada tanggal 6 Januari 1918 di Halle, Jerman. Meskipun teorinya sangat kontroversial pada saat itu, teori Georg sangat bermanfaat. Aturan himpunan yang diperkenalkan Georg Cantor antara lain sebagai berikut

1. Himpunan A dan B dikatakan sama apabila unsur-unsur kedua himpunaan tersebut sama
2. Himpunan A merupakan bagian dari himpunan B, jika elemen dari himpunan A merupakan himpunan B
3. Jika himpunan A dan himpunan B sama, maka himpunan A lebih kecil dari himpunan B
4. Jika himpunan A merupakan himpunan bagian dari B, dan ada sedikitnya satu elemen B yang bukan merupakan elemen himpunan A maka A adalah proper subset B
5. Himpunan terdiri dari satu elemen atau tidak ada unsur sama sekali atau tidak ada elemen sama sekali
6. Himpunan kosong adalah asosiasi yang tidak mempunyai anggota

Ukuran Lebesgue

Dalam teori ukuran, salah satu cabang matematika, ukuran Labesgue, yang diambil dari nama ahli matematika prancis Henry Lebesgue, adalah cara standar untuk menetapkan suatu ukuran ke himpunan bagian *n* – ruang Euclidean berdemensi lebih tinggi. Untuk demensi lebih rendah *n* =1, 2, atau 3, bertepatan dengan ukuran standar panjang, luas, atau volume. Secara umum dapat disebut juga ***n volume –dimensi, n-volume, hipervolume,*** atau sederhananya volume. Ini digunakan di seluruh analisis nyata, khususnya untuk mendefinisikan integrasi Lebesgue. Himpunan yang dapat diberi ukuran Lebesgue disebut **terukur lebesgue** ; ukuran himpunan terukur Lebesgue *A* di sini dilambangkan dengan $\lambda\,(A)$.

Henry Lebesgue menggambarkan ukuran ini pada tahun (1901) yang setahun kemudian diikuti dengan deskripsinya tentang Integral Lebesgue. Keduanya diterbitkan sebagai bagian dari disertasinya pada tahun (1902).

Untuk interval apapun $I = [a, b]$, atau $I = (a, b)$,di set $\mathbb{R}$ bilangan real, misalkan $\ell\,(I) = b - a$ menunjukan panjangnya. Untuk subset apapun $E \subseteq \mathbb{R}$, ukuran luar Lebesgue $\lambda\,(E\,)$ didefinisikan sebagai minimum.

$\lambda\,(E) = inf\ \{\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I\,k) : (Ik)\,k \in \mathbb{N}$ *is* a *sequence of open intervals* $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I\,k\}$.

Definisi di atas dapat digeneralisasikan ke dimensi yang lebih tinggi sebagai berikut. Untuk balok persegi panjang apapun *C* yang merupakan suatu produk $C = I_1 \times \ldots . \times I_n$ interval terbuka, misalkan vol $(\,C\,) = \ell\,(I_1) \times \ldots \times \ell\,(I_n)$ menunjukan volumenya. Untuk subset apapun $E \subseteq \mathbb{R}n, \lambda(E) = inf\,\{\sum_{k=1}^{\infty} vol\ (Ck) : (Ck)\,k \in \mathbb{N}$ *is* a *sequence of products of open intervals with* $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k\,\}$. Berapa set *E* memenuhi kriteria caratheodory, yang mengharuskan hal itu untuk setiap orang $A \subseteq \mathbb{R}$,

$\lambda\,(A) = \lambda\,(A \cap E) + \lambda\,(A \cap Ec)$.

himpunan semua itu E membentuk σ –aljabar. Untuk hal seperti itu E, ukuran lebesgue-nya didefinisikan sebagai ukuran luar Lebesgue: $\lambda\,(E)\;=\;\lambda\,(E)$.

Satu set E yang tidak memenuhi kriteria caratheodory tidak dapat diukur oleh Lebesgue. ZFC membuktikan bahwa himpunan yang tidak dapat diukur memang ada; contohnya adalah himpunan Vitali.

Intuisi

Definisi bagian pertama menyatakan bahwa subset E bilangan real direduksi menjadi ukuran terluarnya dengan cakupan himpunan Interval terbuka. Masing-masing kumpulan Interval ini I meliputi E dalam arti tertentu, karena gabungan dari interval-interval ini mengandung E. Panjang total set interval penutup mungkin melebih-lebihkan ukurannya E, karena E adalah bagian dari gabungan interval, sehingga interval tersebut dapat mencakup titik-titik yang tidak termasuk dalam$E$. Ukuran luar Lebesgue muncul sebagai batas bawah terbesar (infimum) dalam panjang di antara semua kemungkinan himpunan tersebut. secara intuitif, ini adalah panjang total kumpulan interval yang sesua$E$ paling erat dan tidak tumpang tindih.

Itu menjadi ciri ukuran luar lebesgue. Apakah ukuran luar ini diterjemahkan kedalam ukuran lebesgue yang sebenarnya bergantung pada kondisi tambahan. Kondisi Ini diuji dengan mengambil subset A dari bilangan real yang digunakan E sebagai alat untuk membelah$A$ menjadi dua partisi : bagian dari A yang bersinggung dengan E dan bagian yang sisanya A yang tidak masuk E: selisih himpunan A dan E. partisi ini A tunduk pada ukuran lar. Jika untuk semua kemungkinan himpunan bagian tersebut A dari bilangan real, partisi dari A dipotong oleh E mempunyai ukuran luar yang jumlahnya merupakan ukuran luarnya A, lalu ukuran luar Lebesgue dari E memberikan ukuran Lebesguenya. Secara intuitif, kondisi ini berarti himpunan E tidak boleh mempunyai sifat aneh yang menyebabkan katidaksesuaian dalam ukuran himpunan lain kapan E digunakan sebagai “topeng” untuk “menjepit” himpunan tersebut, mengisyaratkan keberadaan himpunan yang ukuran luar lebesgue tidak memberikan ukuran Lebesgue. (Faktanya, himpunan tersebut tidak dapat di ukur oleh Lebesgue.)

Contoh

- Setiap interval tertutup $[a\,,b\,]$ dari bilangan real dapat diukur secara Lebesgue, dan ukuran Lebesgue-nya adalah panjangnya $b\,-\,a$. Interval terbuka $(\,a\,,b\,)$ mempunyai ukuran yang sama, karena selisih kedua himpunan hanya terdiri dari titik akhir a dan b, yang masing-masing mempunyai ukuran nol.
- Setiap hasil kalin kartesius dari interval $[\,a\,,b\,]$ dan $[\,c\,,d\,]$ dapat diukur secara lebesgue, dan ukuran lebesgue-nya adalah $(b\,-\,a\,)\,(\,d\,-\,c\,)$, luas persegi panjang yang bersangkutan.

- Selain itu setiap set borel dapat diukur secara Lebesgue. Namun, ada himpunan terukur lebesgue yang bukan himpunan borel.
- Setiap himpunan bilangan real yang dapat dihitung mempnyai ukuran lebesgue 0. Secara khusus, ukuran lebesgue dari himpunan bilangan aljabar adalah 0, meskipun himpunana tersebut padat di $\mathbb{R}$.
- Himpunan cantor dan himpunan bilangan Liouville adalah contoh himpunan tak terhitung yang mempunyai ukuran Lebesgue 0.
- Jika aksioma determionasi berlaku maka semua himpunan real dapat diukur secara Lebesgue. Namun determinasi tidak sejalan dengan aksioma pilihan. Himpunan vitali adalah contoh himpunan yang tidak dapat diukur dengan menggunakan ukuran lebesgue. Keberadaan mereka bertumpu pada aksioma pilihan.
- Kurva Osgood merupakan kurva bidang sederhana dengan ukuran lebergue positif. (dapat diperoleh dengan sedikit variasi kontruksi kurva piano). Kurva naga adalah contoh lain yang tidak biasa.
- Jalur apapun masuk, untuk $n \geq 2$, memiliki ukuran Lebesgue nol. Secara umum setiap hyperplane yang tepat memiliki ukuran lebesgue nol si ruang ambiennya.
- Volume *n*-bola dapat dihitung melalui fungsi gamma Euler.

Himpunan Cantor

Himpunan cantor ditemukan oleh Henry John Stephen Smith pada tahun 1875, namun diperkenalkan oleh Georg Cantor pada tahun 1845-1918 yang merupakan seorang ahli matematika yang berasal dari Jerman dan memiliki keturunan orang Yahudi(Herlinawati, 2020). Secara topologi, himpunan cantor dianggap sebagai himpunan tak berdimensi. Sehingga, himpunan Cantor memiliki sifat-sifat yang unik yang berasal dari faktor korelasi antara teori himpunan dan fraktal. Himpunan Cantor dapat diinterpretasikan sebagai bentuk interval selang terbuka yang memiliki ukuran yang lebih kecil dan semakin kecil yang meluas pada selang dasar yakni $[0,1]$, sehingga tersisa himpunan yang serupa dengan dirinya sendiri, dan bisa jadi memiliki suatu dimensi yang memenuhi $0 < \quad < 1$.

Himpunan Cantor memiliki proses pembentukan yang dimulai pada interval tertutup $[0,1]$ dan menjadikannya pada tiga sub interval yang memiliki panjang dan besar yang setara. Lalu pada bagian tengah sub interval buka dihapus

$$I_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left(a_1^1, b_1^1\right)$$

sehingga diperoleh,

$$[0,1]-I_1=\left[0,\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},1\right]$$

Kemudian, menjadikannya kembali pada masing-masing interval tertutup yang tersisa menjadi tiga sub interval yang memiliki panjang dan besar yang setara. Lalu pada bagian tengah sub interval buka dihapus pada interval tertutup masing-masing, didapat

$$I_2=\left(\frac{1}{3^2},\frac{2}{3^2}\right)\cup\left(\frac{7}{3^2},\frac{8}{3^2}\right)=\left(a_1^2,b_1^2\right)\cup\left(a_2^2,b_2^2\right)$$

Jadi,

$$[0,1]-(I_1\cup I_2)=\left[0,\frac{1}{3^2}\right]\cup\left[\frac{2}{3^2},\frac{3}{3^2}\right]\cup\left[\frac{6}{3^2},\frac{7}{3^2}\right]\cup\left[\frac{8}{3^2},1\right]$$

Pada sub interval di atas, terjadi pola pengulangan yang terjadi secara terus menerus, oleh karena itu dapat didefinisikan himpunan Cantor ialah sebagai berikut:

Definisi 1

Himpunan Cantor memiliki bentuk notasi $\mathcal{C}$. Didefinisikan $\mathcal{C}:=\bigcap_{n\in\mathrm{N}}I_n$. dengan $I_n=\bigcup_{j=1}^{2n-1}i_n^{(j)}$, dengan $I_n^{(j)}$ adalah interval-interval pada proses pembentukan himpunan Cantor.

Teorema 1

Himpunan Cantor merupakah himpunan kompak (compact)

Bukti: Tiap I_n ialah kombinasi terhitung dari himpunan tertutup. Maka, I_n tertutup. Dikarenakan $C=\bigcap_{n\in\mathrm{N}}I_n$, maka C juga tertutup dan terbatas karena $C\subset[0,1]$.

Teorema 2

Himpunan Cantor merupakan himpunan uncountable/elemen tak terhitung

Bukti: Misalkan $\mathcal{C}$ countable, maka $\mathcal{C}$ bisa ditulis menjadi $\mathcal{C}=\{x_1,x_2,x_3,\ldots\}$.

Dari pola pembentukan himpunan Cantor, maka setiap $x_i\in\mathcal{C}$, dengan x :

$$x_1=0,a_{11}a_{12}a_{13,\ldots}$$
$$x_2=0,a_{21}a_{22}a_{23},\ldots$$
$$x_3=0,a_{31}a_{32}a_{33},\ldots$$

Misal $y\in\mathcal{C}$ dan $y=0,b_1,b_2,b_3,\ldots$ dengan: $b_i=\begin{cases}0, jika \quad a_{ii}=2\\ 2, jika \quad a_{ii}=0\end{cases}$

Karena, untuk setiap $i\in\mathrm{N},b_i\neq a_{ii}$, maka $x_i\neq y$. Maka terjadi kontradiksi pada $y\notin\mathcal{C}$. Jadi permisalan tersebut salah, seharusnya $\mathcal{C}$ adalah uncountable.

Fungsi Cantor

Definisi 1

Fungsi Cantor dapat didefinisikan $F(m)=\frac{2k-1}{2^n}$. Untuk setiap m berada pada selang interval $\lfloor a_k{}^n, b_k{}^n \rfloor$ dengan n sebagai banyaknya iterasi dimana selang interval tersebut terbagi pada proses pembentukan himpunan Cantor, dan k bergerak dari angka 1 hingga j, dimana j merupakkan banyaknya subinterval yang dilepas pada tiap n. Jadi, $\lfloor a_k{}^n, b_k{}^n \rfloor = I_n \cup E,$ dimana E adalah sebuah himpunan pada titik ujung tiap I_n.

Contoh:

$F(m)=\frac{1}{2},$ Jika $\frac{1}{3} \le m \le \frac{2}{3},$

$$F(m)=\begin{cases} \frac{1}{4} & jika \ \frac{1}{3} \le m \le \frac{2}{9} \\ \frac{3}{4} & jika \ \frac{7}{9} \le m \le \frac{8}{9} \end{cases}$$

Teorema 1

Jika F adalah fungsi Cantor, maka:

a) F naik pada domainnya.

b) F akan konstan pada setiap $i_n, \forall n \in \mathrm{N}$

c) F akan kontinu pada setiap $i_n, \forall n \in \mathrm{N}$

d) Turunan pertama pada $F=0$ pada interval $\lfloor a_k{}^n, b_k{}^n \rfloor$

Akibat 1

Jika $\mathcal{C}$ ialah himpunan Cantor dan misalkan F adalah fungsi Cantor, maka fungsi Cantor F adalah fungsi kontinu yang memetakan $[0,1]\backslash\mathcal{C}$ ke $[0,1]$.

Bukti:

Misalkan ambil sebarang $x_0 \in \mathcal{C}$ dengan $x_0 \ne 0$ dan $x_0 \ne 1$. Jika $x_0 \in \mathcal{C}$ maka $x_0 \in i_n$ dengan banyaknya $i_n = 2^n - 1$. Meskipun n merupakan bilangan asli yang cukup besar, x_0 tetap berada diantara kedua interval yang terurut di i_n. Misalkan a_n dan b_n adalah anggota dari i_n dan masing-masing ialah interval yang terurut, maka $a_n < x_0 < b_n$ dan $F(b_n)-F(a_n)=\frac{1}{2^n}$.

Definisi 2

Diberikan $A \subseteq R,\ f: A \to R$ dan f kontinu, L_f ialah himpunan titik-titik untuk membentuk suatu fungsi konstan, $x \in L_f$.

Contoh:

Pada kasus $f =$ fungsi Cantor, maka $L_f = I_n = [0,1] \backslash \mathcal{C}$.

Fungsi Cantor-Lebesgue

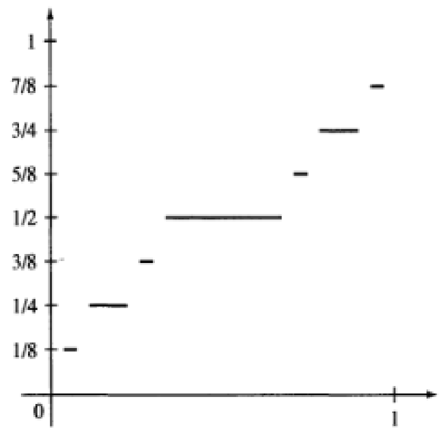
Sebagaimana dinyatakan sebelumnya, fungsi Cantor adalah fungsi kontinu yang monoton naik. Perhatikan teorema berikut.

Teorema 1

Jika F merupakan fungsi Cantor, maka:

1. F adalah fungsi naik pada domainnya,
2. F konstan di setiap i_n , $\forall_n \in \mathbb{N}$
3. F kontinu di setiap i_n , $\forall_n \in \mathbb{N}$
4. Turunan pertama $F = 0$ terdapat pada interval $[a_k^n, b_k^n]$.

Bukti:



Gambar 1. Grafik fungsi Cantor-Lebesgue pada $O_3 = [0,1] \sim C_3$

Berdasarkan teorema di atas dijelaskan bahwa:

1. F adalah fungsi naik, karena $\forall u, v \in [0,1]$ $dengan\ u \leq v,$ sehingga $F(u) \leq F(v)$.
2. F konstan untuk setiap interval yang berada pada $[a_k^n, b_k^n]$.
3. Berdasarkan 2, maka F mrupakan fungsi kontinu di interval $[a_k^n, b_k^n]$.
4. Berdasarkan 2, maka turunan $F = 0$ di interval $[a_k^n, b_k^n]$.

Teorema di atas menunjukkan himpunan Cantor kepada [0,1] dan menunjukkan bahwa fungsi Cantor bersifat monoton naik dan kontinu, tetapi tidak kontinu mutlak, atau sepenuhnya kontinu(Herlinawati, 2020).

Lihat lemma berikutnya.

Lemma 2 Misalkan A itu adalah kumpulan Cantor, maka A itu tertutup dan tidak terhitung dan $m(C) = 0$.

Perhatikan lemma di atas, yang menyatakan bahwa himpunan Cantor memiliki ukuran lebegsue nol meskipun tak terhitung.

Lemma 3 Misalkan subhimpunan C terukur Lebesgue dari interval $[0,1]$, maka $G(C)$ adalah himpunan yang tidak terukur Lebesgue, menurut Lemma.

Selanjutnya, teorema-teorema berikut adalah hasil utama dari artikel ini.

Teorema 4 Misalkan ϕ fungsi Cantor-Lebesgue dan definisikan fungsi ϕ pada [0,1] sebagai

$$\psi(x) = \phi(x) + \frac{1}{2}x,$$

pada setiap $x \in [0,1]$. Maka ψ merupakan fungsi kontinu naik sejati yang mendefinisikan [0,1] ke [0,$\frac{3}{2}$] dan

1. mendefinisikan himpunan Cantor C sebagai himpunan terukur positif dan
2. subhimpunannya sebagai himpunan tak terukur.

Bukti:

Ingat bahwa fungsi $y = \frac{1}{2}x$ adalah fungsi kontinu yang naik sejati, tetapi fungsi $y = \phi(x)$ adalah fungsi kontinu dan monoton naik. Oleh karena itu, fungsi ψ adalah jumlah dari dua fungsi kontinu, dan fungsi ψ adalah jumlah dari dua fungsi naik dan naik sejati, sehingga merupakan fungsi kontinu sejati.

Selain itu, karena $\psi(0) = 0$ dan $\psi(1) = \frac{3}{2}$, maka $\psi([0,1]) = \left[0, \frac{3}{2}\right]$. Tinjauan untuk menghasilkan $O = [0,1] \sim C$ didapat $[0,1] = C \cup O$ dan $[0, \frac{3}{2}] = \psi(0) \cup \psi(C)$ menunjukkan bahwa fungsi ψ memenuhi 1.

Ingat bahwa sifat fungsi kontinu yang naik sejati pada sebuah interval menjamin adanya fungsi invers. Akibatnya, fungsi $\psi(C)$ tutup dan $\psi(0)$ buka dapat diukur karena keduanya berfungsi dengan cara yang sama.

Misalkan juga bahwa $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ adalah kumpulan interval yang diambil dari proses penghapusan yang digunakan dalam pembuatan himpunan Cantor. Karena $O = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ konstan pada setiap I_k, ψ memetakan I_k ke dalam translasi I_k sendiri dengan interval yang sama. Koleksi $\{\psi(I_k)\}_{k=1}^{\infty}$ tidak terhubung karena merupakan fungsi satu-satu.

Dengan mempertimbangkan sifat *countable additivity* dari ukuran Lebesgue, maka

$$m(\psi(0)) = \sum_{k=1}^{\infty} l(\psi(l_k)) = \sum_{k=1}^{\infty} l(l_k) = m(0) \qquad (1)$$

Namun, $m(C) = 0$ karena $m(O) = 1$. Oleh karena itu, $m(\psi(0)) = 1$ dan sebagai hasilnya, dari (1), $m(\psi(C)) = \frac{1}{2}$, sehingga ψ menghubungkan himpuanan Cantor C ke dalam himpunan yang berukuran positif.

Selanjutnya menurut Teorema Vitali, $\psi(C)$ memuat suatu himpunan tak terukur yang disebut W. Karena itu adalah subhimpunan dari himpunan Cantor, himpunan $\psi^{-1}(W)$ adalah himpunan terukur yang dipetakan ke dalam himpunan tak terukur oleh $m(\psi^{-1}(W)) = 0$.

Seperti yang ditunjukkan dalam teorema berikut, perumuman salah satu keluarga fungsi dapat dibuat dari Teorema 5. Perumuman ini akan menghubungkan himpunan terukur ke dalam himpunan tak terukur.

Teorema 5 Misalkan ϕ fungsi Cantor-Lebesgue dan definisikan fungsinya pada [0,1] sebagai $\psi(x) = \phi(x) + nx, n \in \mathbb{Q}$ untuk setiap $x \in [0,1]$. Himpunan Cantor C kemudian dimasukkan ke dalam himpunan terukur yang berukuran positif oleh fungsi kontinu naik sejati, dan himpunan terukur, termasuk subhimpunannya, dimasukkan ke dalam himpunan tak terukur.

Bukti:

Perhatikan $\psi(0) = 0$ dan $\psi(1) = n,$ kemudian lihat untuk $0 = [0,1]\sim C$. Kemudian didapat $[0,1] = C \cup O$ dan $[0,1] = \psi(O) \cup \psi(C)$ karena itu adalah fungsi kontinu dan fungsi naik sejati, maka ψ ada dan kontinu. Akibatnya, buka dan tutup dapat diukur(Herlinawati, 2020).

Misalkan juga bahwa $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ adalah kumpulan temporer yang dikeluarkan dari proses penghapusan saat membentuk himpunan Cantor. Karena ϕ konstan pada setiap I_k, maka $\{\psi(I_k)\}_{k=1}^{\infty}$ saling lepas.

Dengan mempertimbangkan sifat *countable additivity* dari ukuran Lebesgue, maka

$$m(\psi(O) = m(O) \qquad (1)$$

Namun, $m(C) = 0$ sehingga $m(O) = 1$.

Hasil berikut didasarkan pada Teorema 5 dan 6.

Akibat 6 Misalkan himpunan peta A terukur dan fungsi f kontinu pada A, maka himpunan peta $f(A)$ tidak tentu terukur.

KESIMPULAN DAN SARAN

Kekontinuan suatu fungsi tidak selalu mempertahankan sifat keterukuran domain fungsi, tetapi ini tidak selalu berlaku dalam ruang ukuran. Fungsi Cantor-Lebesgue yang kontinu untuk setiap x dalam [0,1] untuk fungsi $\psi(x) = \phi(x) + nx, n \in \mathbb{Q}$ menghubungkan himpunan terukur ke himpunan tak terukur dan merupakan subhimpunan dari himpunan Cantor.

Penulis tentunya masih menyadari jika artikel diatas masih terdapat banyak kesalahan dan jauh dari kesempurnaan. Penulis berharap bahwa pembaca dapat memberi kritik dan saran agar dapat diperbaiki dalam pembuatan artikel selanjutnya dengan berpedoman pada banyak sumber.

DAFTAR REFERENSI

Darwanto, Karsonai Berta Dinata, Junaidi 2020. *"Teori Himpunan"* : Lampung/Universitas Muhammadiyah Kotabumi.

Dylan, R.N. (2002). *The Cantor Set-A Brief Introduction*.

Edi Wiyono, Riski Wahyu Yunian Putra, Netriwati, Dr. bambang Sri Anggoro 2020. *"Himpunan Matematika, Pembahasan Materi Dan Soal Cerita Himpunan"* : Bandar Lampung/CV. Arjasa Pratama.

Herlinawati, E. (2020). Fungsi Cantor-Lebesgue Dan Himpunan Terukur Lebesgue. *FIBONACCI: Jurnal Pendidikan Matematika Dan Matematika*, *6*(2), 99–104. https://doi.org/10.24853/fbc.6.2.99-104

Kisti Nur Aliyah, M. (2013). Fungsi Cantor. *MATHunesa: Jurnal Ilmiah Matematika*.

Nur Aliyah, K. (2024). *Fungsi Cantor*. 1–6.

Royden, HL (1988). *Analisis Nyata (Edisi ke-3rd)*. New York: macmilan. P. 56.ISBN _ 0-02-404151-3.

Statistika dan Matematika Himpunan Cantor. *Matematika FMIPA Unpam*, *2*(2), 167–175.